# Tentamen Numerieke Wiskunde 2
# 8 november 2007

Duur: 3 uur

N.B. De notatie van het boek van Burden and Faires is aangehouden tenzij anders aangegeven.

## Opgave 1

Gegeven de twee-staps Runge-Kutta methode gedefinieerd door

$$w_{i+1} = w_i + \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2,$$

waarin $k_1 = hf(t_i, w_i)$ en $k_2 = hf(t_i + \alpha h, w_i + \alpha k_1)$.

a. Toon aan dat deze methode tweede-orde nauwkeurig is als $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ en $\gamma_2 \alpha = 1/2$.

b. In veel golfproblemen heeft de Jacobiaan van het rechterlid zuiver imaginaire eigenwaarden. De geschiktheid van een numerieke methode hangt af van de doorsnijding van het absolute stabiliteitsgebied met de imaginaire as. Onderzoek dit voor de Forward Euler methode, de methode genoemd in het vorige onderdeel, en voor een methode waarvoor $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ en $\gamma_2 \alpha = 1$. Welke betekenis heeft het absolute stabiliteitsgebied?

Beschouw de klasse van meerstapsmethoden

$$w_{i+1} = -2\alpha w_i + (1 + 2\alpha) w_{i-1} + h[(2 + \alpha) f(t_i, w_i) + \alpha f(t_{i-1}, w_{i-1})].$$

c. Is deze methode consistent? Beargumenteer uw antwoord.

d. Voor welke $\alpha$ voldoet deze methode aan de wortelconditie? En wanneer voldoet het aan de sterke wortelconditie? Wat is de betekenis van deze condities?

e. Geef aan hoe voor deze methode het absolute stabiliteitsgebied kan worden bepaald. U hoeft die niet expliciet te berekenen.

## Opgave 2

a. Beschouw de Powermethode

$$y^{(m)} = Ax^{(m-1)}, x^{(m)} = y^{(m)}/||y^{(m)}||_\infty.$$

Stel dat voor de eigenwaarden van de matrix $A$ van orde $n$ geldt: $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \cdots > |\lambda_n|$. Toon aan dat deze methode convergeert naar de eigenvector die behoort bij $\lambda_1$ en dat de convergentie bepaald wordt door de verhouding $|\lambda_2|/|\lambda_1|$.

b. Beschouw de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -1 & 3 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Localiseer de eigenwaarden van deze matrix en die van zijn inverse. Voor welke $\alpha$ is $(A - \alpha I)$ niet diagonaal dominant?

**Z.O.Z!**

c. Op $A$ gegeven in het vorige onderdeel passen we inverse iteratie toe, waarbij voor de verschuiving 3 wordt gekozen, dus de iteratie wordt

$$(A - 3I)y^{(m)} = x^{(m-1)}, x^{(m)} = y^{(m)}/||y^{(m)}||_\infty.$$

Waar convergeert deze iteratie naar toe en waardoor wordt de convergentie bepaald.

d. Hoeveel bewerkingen vergt het oplossen van het stelsel in het vorige onderdeel (voor grote $n$) als er niet gepivoteerd wordt? Is het verstandig om in dit geval op voorhand vast te leggen dat er niet gepivoteerd hoeft te worden? Beargumenteer uw antwoord.

## Opgave 3

Beschouw voor functies $u$ uit $C_0^2[0,1]$, dat is $u$ in $C^2[0,1]$ en $u(0) = u(1) = 0$, de integraal

$$I[u] = \int_0^1 (1 + x^2)[u'(x)]^2 + 2u(x)dx.$$

a. Geef het hieraan gerelateerde randwaardeprobleem dat ontstaat na minimalisatie van $I[u]$ over $C_0^2[0,1]$.

b. Geef het lineaire systeem dat ontstaat na minimalisatie van $I[u]$ over alle polynomen van de graad 2 die in $C_0^2[0,1]$ liggen.

c. Beschrijf hoe een benaderende oplossing van het probleem onder $a$ kan worden verkregen met de eindige elementen methode, waarbij per element een lineaire benadering wordt gekozen.

d. Stel het onder $a$ verkregen randwaardeprobleem noemen we $Ly = f$ en we breiden dat uit naar een beginrandwaarde probleem $y_t = f - Ly$, waarbij $y(0,x)$ gegeven is. Stel we discretiseren dit stelsel eerst in de tijd met behulp van de backward Euler methode. Welke randwaardeprobleem moet dan elke tijdstap worden opgelost? Pas de integraal boven deze opgave zo aan dat na minimalisatie de oplossing van deze vergelijking eruit komt.